

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А. А. ЛЯПУНОВ

Вопросы  
теории множеств  
И  
теории функций

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
МОСКВА 1979

УДК 517.5+519.5

Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций. М., «Наука», 1979. 264 с.

Публикуемые в настоящем издании работы можно разделить на три части. К первой относятся работы, в которых развиваются и обобщаются классические результаты Н. Н. Лузина и П. С. Новикова, относящиеся к  $A$ -,  $B$ - и  $C$ -множествам. Сюда же относятся три обзорные статьи, посвященные  $B$ -функциям,  $C$ -множествам и счетно-формным  $A$ - и  $B$ -множествам. Во вторую часть включены работы, посвященные подробному изучению  $R$ -множеств. К третьей части принадлежат работы, которые относятся к области функционального анализа и посвящены изучению вполне аддитивных вектор-функций множеств, используемых в математической статистике и при решении задач математической экономики.

Книга будет интересна математикам всех специальностей, а также полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов университетов и технических вузов, где изучается математика в достаточном объеме.

Редколлегия:

С. Л. СОБОЛЕВ (главный редактор),  
А. П. ЕРШОВ, З. И. КОЗЛОВА, А. Д. ТАЙМАНОВ,  
Е. А. ЩЕГОЛЬКОВ, С. В. ЯБЛОНСКИЙ



Издательство «Наука», 1979 г.

## ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

Издание трудов члена-корреспондента АН СССР Алексея Андреевича Ляпунова осуществляется по инициативе Президиума СО АН СССР. Настоящий том содержит избранные работы А. А. Ляпунова по дескриптивной теории множеств и теории функций, опубликованные им за период с 1939 по 1973 г.

Дескриптивная теория множеств сыграла важную роль в развитии многих областей математики. Ее проблематика оказалась тесно связанной с вопросами обоснования математики, что предопределило ее значение для развития современной математической логики и оснований математики. Следует также упомянуть о плодотворном влиянии ее методов и подходов на исследования по кибернетике. Этим в значительной степени объясняется возобновившийся интерес к этой области математики в настоящее время.

Работы А. А. Ляпунова по дескриптивной теории множеств представляют ценный вклад в развитие этой теории. Подробно об этом говорится в обзорной статье В. Я. Арсенина, З. И. Козловой и А. Д. Тайманова, помещенной в этом томе.

Алексей Андреевич Ляпунов родился 8 октября 1911 г. в Москве. Его отец — Андрей Николаевич Ляпунов — математик по образованию, сначала работал в путевом ведомстве, а затем в Институте биофизики. Род Ляпуновых — весьма обширный, известен многими именами выдающихся ученых. К ним принадлежит и знаменитый математик и механик Александр Михайлович Ляпунов — двоюродный брат Николая Викторовича Ляпунова — деда Алексея Андреевича.

В 1928 г., окончив 42-ю московскую школу, А. А. Ляпунов поступил в Московский университет на физико-математический факультет.

Вначале научные интересы А. А. Ляпунова были в области астрономии, геофизики и, под влиянием П. П. Лазарева, в только зарождавшейся тогда биофизике. Но с начала 30-х годов знакомство с Н. Н. Лузиным, а затем постоянное общение с ним пробудили у Алексея Андреевича творческий интерес к математике.

В 1934 г., после переезда Академии наук в Москву, Н. Н. Лузин стал заведовать только что образовавшимся отделом теории функций действительного переменного в Институте математики им. В. А. Стеклова. Туда же он пригласил на работу А. А. Ляпунова на должность младшего научного сотрудника. В том же году А. А. Ляпунов выполнил и опубликовал свою первую научную работу «Об отделимости аналитических множеств».

В 1935 г. А. А. Ляпунов начал систематически работать в дескриптивной теории множеств под руководством П. С. Новикова, который состоял в том же отделе у Н. Н. Лузина. С этого времени и в течение всего периода активной творческой деятельности в области теории множеств А. А. Ляпунов работал в тесном сотрудничестве с П. С. Новиковым, по праву считая себя его учеником и последователем. Между ним и П. С. Новиковым сложились большая дружба и взаимное уважение.

А. А. Ляпунов очень много делал для популяризации идей и научных достижений своих учителей Н. Н. Лузина и П. С. Новикова, неизменно выражая свое преклонение перед ними как учеными.

В 1939 г. А. А. Ляпунов защитил кандидатскую диссертацию «Об униформизации аналитических дополнений».

В годы с 1939 по 1941 А. А. Ляпунов по совместительству работал доцентом в МГПИ им. К. Либкнехта, где читал лекции по математическому анализу и теории функций. Вместе с В. И. Гливенко и П. С. Новиковым Алексей Андреевич руководил научной работой студентов, вовлекая их в исследовательские семинары. Уже тогда проявилось его яркое педагогическое дарование и приверженность к работе с молодежью. Студентов влекло к нему его доброжелательное отношение к ним и та увлеченность и доверительная серьезность, с которыми он обсуждал с ними математические проблемы.

Некоторое время перед войной А. А. Ляпунов работал под руководством А. Н. Колмогорова в теории вероятностей и ее приложениях.

Общение и совместная работа А. А. Ляпунова с такими выдающимися учеными, как Н. Н. Лузин, П. С. Новиков, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, очень много дали для развития таланта А. А. Ляпунова и оказали влияние на его дальнейшую творческую деятельность.

Начало Великой Отечественной войны застало А. А. Ляпунова в должности старшего научного сотрудника Математического института им. В. А. Стеклова. Институт был эвакуирован в Казань. В грозный час советский народ встал на защиту своей Родины. А. А. Ляпунов вместе с молодыми сотрудниками Института участвует в строительстве оборонительных сооружений в области Малоярославца. С начала 1942 г. А. А. Ляпунов на действительной военной службе в Советской Армии. Окончив Владимирское военное училище, он участвует в боях с немецко-фашистскими захватчиками на Южном, 4-м Украинском и 3-м Прибалтийском фронтах в составе 2-й Гвардейской Армии 3-й Краснознаменной гвардейской дивизии 22-го артиллерийского полка командиром топо-вычислительного взвода в звании гвардии старшего лейтенанта. За боевые заслуги А. А. Ляпунов награжден орденом Красная Звезда и медалями. В 1944 г. в боевой обстановке он становится членом КПСС.

После окончания Великой Отечественной войны и до 1951 г. А. А. Ляпунов преподавал математику в Артиллерийской академии им. Ф. Дзержинского. В это время он опубликовал серию работ по военной топографии и теории стрельбы, выполненных им в годы войны.

В период с 1946 по 1949 г. А. А. Ляпунов состоял в докторантуре в Математическом институте им. В. А. Стеклова. В конце 1949 г. он защитил диссертацию «Об операциях, приводящих к измеримым множествам» и ему была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук. В 1950 г. ему присвоено звание профессора.

В 1952 г. А. А. Ляпунов вернулся на работу в АН СССР, где в Математическом институте им. В. А. Стеклова, а затем в Институте прикладной математики проработал до 1962 г.

С 1953 г. А. А. Ляпунов ведет педагогическую работу в Московском университете в качестве профессора кафедры вычислительной математики. К этому времени относится начало кипучей деятельности А. А. Ляпунова в области кибернетики. Он читает лекции, выступает с докладами, руководит семинарами, ведет большую организаторскую работу. А. А. Ляпунов становится одним из основателей и общепризнанным лидером советской школы кибернетики. Он становится заместителем председателя созданного по его инициативе Научного совета по кибернетике АН СССР (председатель А. И. Берг).

В 1957 г. на механико-математическом факультете МГУ А. А. Ляпунов организует первый в стране научно-исследовательский семинар по кибернетике, ее теории и приложениям. Семинар дал толчок развитию исследова-

ний по кибернетике в нашей стране. Из числа его участников впоследствии вышли известные ученые в области теоретической и прикладной кибернетики С. В. Яблонский, О. Б. Лупанов, Н. П. Бусленко, М. Л. Цетлин, А. П. Ершов, О. С. Кулагина, Ю. И. Журавлев, В. И. Левенштейн, Р. И. Подловченко и др.

В том же году в значительной мере по инициативе А. А. Ляпунова и при его участии в качестве члена редакции начал выходить сборник «Математическое просвещение». С 1958 г. и до конца жизни А. А. Ляпунов — главный редактор основанного им сборника «Проблемы кибернетики», который остается и по настоящее время главным печатным органом советских кибернетиков. При жизни А. А. Ляпунова вышли в свет около 30 томов «Проблем кибернетики». Издание их продолжают его ученики.

\* С 1960 г. совместно с О. Б. Лупановым А. А. Ляпунов редактирует выходящую в издательстве «Мир» серию «Кибернетический сборник», содержащую переводы статей зарубежных авторов.

Активное участие А. А. Ляпунов принимал в жизни Московского математического общества, с 1954 по 1962 г. был членом правления его.

Многогранная научная, педагогическая и общественная деятельность А. А. Ляпунова в Москве продолжалась до 1962 г., затем он переезжает в Новосибирск для работы в СО АН СССР.

Здесь в Институте математики он возглавляет Отдел теоретической кибернетики. Одновременно занимает должность профессора и заведующего кафедрой в Новосибирском государственном университете. Нельзя сказать, что переезд А. А. Ляпунова в Новосибирск явился новым этапом в его деятельности, скорее это было бурное ее продолжение и расширение в новых условиях быстро растущего научного центра.

Уже с февраля 1962 г. под руководством А. А. Ляпунова в Институте математики Сибирского отделения Академии наук начинается работа семинара по кибернетике.

В Университете он читает лекции по математическому анализу, теории операций, программированию и различным вопросам математического естествознания.

В 1964 г. А. А. Ляпунов избирается членом-корреспондентом Академии наук СССР. Это было признанием его высоких научных заслуг.

Круг научных интересов А. А. Ляпунова чрезвычайно разнообразен и широк: теория множеств и теория функций, вычислительная математика, теория вероятностей и математическая статистика, программирование и ЭВМ, математическое моделирование процессов управления и математическая лингвистика, геофизика и биология, методологические проблемы науки и педагогические вопросы математики. Ему принадлежит около 200 научных работ. В своих работах А. А. Ляпунов, помимо прекрасного в литературном отношении изложения вопросов теории, щедро делится своими мыслями о природе рассматриваемых понятий, о смысле и трудностях исследуемых проблем. Он никогда не ограничивается постановкой узкой проблемы и ее решением, а всегда ставит ее широко, в связи с результатами в смежных направлениях, перспективами ее развития и приложения.

Особую значимость имела педагогическая деятельность А. А. Ляпунова. Он читал лекции студентам высших учебных заведений и учащимся средних школ, выступал с докладами перед учителями и рабочими. Широко известна роль А. А. Ляпунова как организатора и руководителя одной из первых в нашей стране специализированной физико-математической школы-интерната при Новосибирском университете. Он первый председатель Ученого совета ФМШ и один из организаторов сибирских математических олимпиад для школьников. Огромная популярность А. А. Ляпунова как лектора и наставника молодежи объясняется его редким умением доступно, интересно и

притом на самом высоком научном уровне вести беседу или читать лекцию для слушателей с самым различным образованием. Его внешнее и внутреннее обаяние, широкий научный кругозор и страстное отношение к науке способствовали пробуждению у слушателей глубокого интереса к научным знаниям, создавали атмосферу доверия и уважения к нему как к ученому и очень доброму человеку.

А. А. Ляпунову принадлежит немало педагогических трудов — статей по вузовскому и школьному образованию, о подготовке научной смены, опубликованных на страницах специальных научных и массовых журналов и газет. В них выражена забота о народном образовании, раздумья о совершенствовании системы обучения. Вот далеко не полный, но весьма характерный перечень статей и проблем, с которыми он выступает: «Система образования и систематизация наук», «О роли математики в современной человеческой культуре», «Требования, предъявляемые к преподаванию математики во ВТУЗе в связи с развитием кибернетики и машинной математики», «Современник и школа», «В ногу с научным прогрессом» и др. Труды А. А. Ляпунова, посвященные вопросам образования, имеют актуальное значение для преподавателей ВУЗов и учителей школ, для педагогической науки и широкой общественности.

Выдающийся ученый и замечательный педагог, А. А. Ляпунов пользовался искренним уважением и любовью всех тех, кто работал с ним или учился у него. Его отличали неиссякаемая энергия и огромная трудоспособность, преданность науке, смелость и принципиальность в научных исканиях и практических делах. Ему были свойственны щедрость души, высочайшая степень интеллигентности, внимательное, доброжелательное отношение к людям.

Яркая и плодотворная научная деятельность А. А. Ляпунова была отмечена орденом Ленина, двумя орденами Трудового Красного Знамени и орденом «Знак Почета».

*С. Л. Соболев,  
Е. А. Щегольков*

## СОДЕРЖАНИЕ

От редколлегии..... 3

Вклад А.А. Ляпунова в развитие дескриптивной теории множеств (В. Я. Арсенин, З. И. Козлова, А. Д. Тайманов) . . . . . 7

### ЧАСТЬ I

#### РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ: A-, B- И C-МНОЖЕСТВА (1939-1970 гг.)

О кратной отделимости для $A$ -операции.....	31
О кратной отделимости .....	43
О кратной отделимости для $\delta s$ -операций .....	44
Об эффективной измеримости.....	48
О непрерывных отображениях $A$ -множеств .....	52
Обзор по дескриптивной теории множеств .....	55
Глава I. $B$ -функции.....	55
Глава II. $C$ -множества и их свойства .....	64
Глава III. Счетно-формные $A$ - и $B$ -множества .....	72
О накрытии $A$ -множеств и кратной отделимости .....	83

### ЧАСТЬ II

#### РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ: R-МНОЖЕСТВА (1950—1973 гг.)

$R$ -множества.....	85
Введение .....	85
Глава I. $R$ -операции.....	87
Глава II. Принцип сравнения индексов .....	95
Глава III. $R$ -множества.....	107
Глава IV. О построении измеримых множеств .....	113
Глава V. $T$ -операция с постоянной базой .....	122
Глава VI. О $\delta s$ -операциях, сохраняющих измеримость и свойство Бэра.....	125
Об эквивалентности семейств множеств .....	132
О классификации $R$ -множеств.....	134
Отделимость и неотделимость $R$ -множеств.....	141
О признаках вырождения для $R$ -множеств .....	156
Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы .....	169
Об операциях над множествами.....	201
О методе трансфинитных индексов в теории операций над множествами .....	209

ЧАСТЬ III  
РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ  
ФУНКЦИЙ (1940-1964 гг.)

О выборе из конечного числа законов распределения . . . .	224
О вполне аддитивных вектор-функциях. I.....	232
О вполне аддитивных вектор-функциях. II .....	244
О вполне аддитивных вектор-функциях. III (Об одной задаче Ю. Ч. Неймана) .....	246
О вполне аддитивных вектор-функциях. IV .....	250
Список трудов А. А. Ляпунова по вопросам теории множеств и теории функций .....	261

**Алексей Андреевич  
ЛЯПУНОВ**

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ  
И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Утверждено к печати

Институтом математики Сибирского отделения Академии наук СССР

Редакторы Н. Н. Лезнова, В. П. Сироткина.  
Художник Н. П. Фролов. Художественный редактор Т. П. Поленова.  
Технические редакторы Н. Н. Плохова, Ф. М. Хенох.  
Корректор Н. И. Казарина.

ИБ № 7171

Сдано в набор 7.07.78. Подписано к печати 15.01.79. Т-01413. Формат 70X108 Vie-  
Бумага типографская № 1. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.  
Усл. иеч. л. 23,1. Уч.-изд. л. 20,7. Тираж 2900 экз. Тип. зак. 570.  
Цена 2 р. 60 к.

Издательство «Наука», 117485, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 94а  
Ордена Трудового Красного Знамени Первая типография издательства «Наука».  
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12



