А.А. Ляпунов

Пётр Сергеевич Новиков

(к 50-летию со дня рождения)

28 августа 1951 года исполнилось 50 лет выдающемуся советскому математику Петру Сергеевичу Новикову.

Пётр Сергеевич поступил в Московский университет в 1919 году. Однако осенью того же года он был призван в Красную Армию и вернулся в Университет лишь в 1922 году.

Это был период расцвета научной и педагогической деятельности Н. Н. Лузина, который являлся главой московской теоретико-функциональной школы. Пётр Сергеевич сразу стал одним из ближайших его учеников.

Лузин рано оценил творческие возможности Петра Сергеевича и посоветовал ему взяться за одну из наиболее трудных задач, стоявших в тот момент перед дескриптивной теорией множеств—за проблему взаимоотношения явных и неявных *B*-функций. В 1905 году Лебег опубликовал решение этой проблемы, оказавшееся совершенно ошибочным. С тех пор вопрос оставался без продвижения.

В 1927 году П. С. Новиков получил полное решение поставленной проблемы. Он до конца выяснил взаимоотношения между явными и неявными *B*-функциями.

Рассмотрим *B*-функцию от двух переменных $F(x, y)$. Пусть уравнение $F(x, y)=0$ определяет у как неявную функцию от x. Обозначим через E множество тех значений x, для которых эта неявная функция определена. Основной вопрос ставился так: всегда ли существует явная *B*-функция $y=\varphi(x)$, определённая всюду на множестве E и удовлетворяющая уравнению $F(x, \varphi(x))=0$. Лебег полагал, что это действительно так.

Пётр Сергеевич показал, что в общем случае вопрос решается отрицательно, однако, если для каждого x существует не более чем счётное число значений y, удовлетворяющих уравнению $F(x, y)=0$, то ответ на поставленный вопрос утвердителен. Для получения этого результата П. С. Новиков установил принцип сравнения индексов, который сделался впоследствии наиболее мощным инструментом в дескриптивной теории множеств. С помощью этого принципа Н. Н. Лузин установил вторую теорему отделимости *A*-множеств.

Ряд последующих работ П. С. Новикова и его учеников (В. Я. Арсенина, 3. И. Козловой, А. А. Ляпунова) был посвящён различным обобщениям принципа сравнения индексов и приложениям его к изучению строения *A*-множеств и проективных множеств.

В этих работах было детально изучено явление кратной отделимости, а также были выяснены дескриптивные условия, при которых проекция *B*-множества оказывается *B*-множеством.

После того как изучение *A*-множеств было в основном завершено, центральной задачей дескриптивной теории множеств являлось изучение открытых Н. Н. Лузиным проективных множеств.

Однако ещё Н. Н. Лузин обнаружил, что при изучении проективных множеств возникают затруднения совершенно особенного характера. Н. Н. Лузин высказал убеждение в том, что основные вопросы, касающиеся проективных множеств, не могут быть разрешены современными математическими средствами.

В 34—35-х годах П. С. Новиков предпринял детальное изучение проективных множеств второго класса и показал, что комплекс вопросов, доступных средствам теории множеств, оказался существенным образом шире, чем это предполагал Н. Н. Лузин.

Петру Сергеевичу удалось разрешить вопрос об отделимости проективных множеств второго класса, причём результаты оказались противоположными тем, которых в этой области можно было ожидать. Оказалось, что:

1. Всякие два непересекающихся CA_2-множества отделимы посредством B_2-множеств.
2. Существуют непересекающиеся A_2-множества, неотделимые посредством B_2-множеств.
3. Если у двух CA_2-множеств (или же A_2-множеств) удалить их общую часть, то оставшиеся части отделимы посредством A_2-множеств.

Таким образом, аналогами *A*-множеств оказываются CA_2-множества, а аналогами *CA*-множеств оказываются *A*-множества. Это значит, что во втором классе проективных множеств происходит обращение законов отделимости. Это явление находит объяснение в том, что для второго класса проективных множеств также имеет место принцип сравнения индексов, но только роль *A*-множеств играют CA_2-множества.

Одной из наиболее важных задач, неразрешимость которой в рамках теории множеств заподозрил Лузин, является проблема о существовании несчётных *CA*-множеств без совершенного ядра.

Эту задачу Н. Н. Лузин нередко использовал в качестве пробного камня. Если он приходил к убеждению в том, что решение некоторой другой задачи повлечёт за собой решение проблемы о мощности *CA*-множеств, то он объявлял эту новую задачу также неразрешимой (впрочем, надо иметь в виду, что при этом Лузин руководствовался чисто интуитивным соображением).

П. С. Новиковым была разрешена одна из задач, которую долгое время считали равносильной проблеме о мощности *CA*-множеств: им был дан эффективный процесс указания точки в непустом *CA*-множестве. Этот процесс оказался в дальнейшем чрезвычайно плодотворным.

С другой стороны, П. С. Новикову удалось строго доказать гипотезу о том, что если всякое несчётное *CA*-множество имеет конституанту, содержащую более одной точки, то из этого следует, что всякое несчётное *CA*-множество имеет совершенное ядро.

Два последних результата П. С. Новикова, взятые вместе, довольно чётко ограничивают область, доступную классической теории множеств, от области, повидимому, лежащей за её пределами. Эти результаты можно перефразировать таким образом: во всяком непустом *CA*-множестве можно эффективно указать точку, принадлежащую наименьшей конституанте. Однако для решения вопроса о мощности *CA*-множеств это не даёт ничего; с другой стороны, если бы было возможно какими угодно средствами в любом несчётном *CA*-множестве найти две точки, принадлежащие одной и той же конституанте, то проблема о существовании совершенного ядра в несчётных *CA*-множествах была бы разрешена в положительном смысле.

Построения классического анализа в общем не выводят за пределы класса проективных множеств, однако эффективные средства теории функций, допускающие трансфинитную индукцию, но свободные от аксиомы произвольного выбора, дают возможность строить множества, уже не являющиеся проективными.

Петру Сергеевичу удалось описать некоторую конструкцию классов множеств, занумерованных не только трансфинитами второго класса, но также трансфинитами третьего класса, которые представляют собой в некотором смысле универсальный каталог всех тех множеств, которые могут быть построены теоретико-множественными средствами без помощи аксиомы произвольного выбора. Во всяком случае до настоящего времени теория множеств не располагает эффективными конструкциями, выводящими за пределы этих классов. Вопрос о том, простирается ли эта классификация по всем трансфинитам третьего класса или же она затухает где-то раньше, остаётся открытым и, повидимому, принадлежит к числу вопросов, которые также не могут быть разрешены средствами теории множеств.

Деятельность П. С. Новикова в области дескриптивной теории множеств существенно раздвинула возможности этой науки и значительно расширила круг результатов, добытых ею. В то же время его деятельность косвенным образом подкрепила точку зрения Лузина о том, что возможности теории множеств ограничены и что теория множеств уже поставила целый ряд задач такого характера, решение которых её собственными средствами невозможно. Однако такими косвенными подтверждениями важных гносеологических обстоятельств ни в коем случае нельзя было ограничиться. В связи с этим Пётр Сергеевич приступил к детальному анализу природы тех трудностей, с которыми столкнулась теория множеств. Это привело к тому, что основная его научная деятельность переместилась в область математической логики.

Основные устремления П. С. Новикова в области математической логики направлены на выяснение того, какова роль логических принципов в математике.

В своей первой логической работе Пётр Сергеевич установил, что в некотором классе, так сказать, «хорошо обозримых» вопросов, касающихся целых чисел, имеет место такое общее явление: из неэффективного решения вопроса такого типа всегда можно элиминировать все неэффективные средства и получить решение в совершенно конкретной форме. Точнее, допустим, чторечь идёт о некотором свойстве целых чисел *F(n),* причём для каждого отдельного числа конечным числом операций можно выяснить, обладает оно этим свойством или нет. Пусть теперь применением неэффективных средств с использованием закона исключённого третьего, но без употребления принципа непрерывности и аксиомы произвольного выбора установлено, что допущение о том, что все целые числа обладают свойствами *F(n),* ложно. Тогда, как установил Пётр Сергеевич, из этого рассуждения всегда можно извлечь указание числа *n.* для которого *F(n)* ложно.

Последние годы Пётр Сергеевич посвятил приложению математической логики непосредственно к задачам теории множеств. Первые шаги в направлении приложения математической логики к теории множеств были сделаны ещё Гильбертом в начале 20-х годов. Он опубликовал своё доказательство непротиворечивости гипотезы континуума. Идея Гильберта состояла в построении некоторой системы объектов, удовлетворяющих всем аксиомам теории множеств, для которых утверждение гипотезы континуума оказывается истинным. Однако вскоре обнаружилась недостаточность рассуждений Гильберта.

Только в 1937 году Геделю удалось осуществить замысел Гильберта и строго доказать непротиворечивость континуум-гипотезы. В той же работе Гедель заявил, что им доказана непротиворечивость существования неизмеримых проективных множеств, а также непротиворечивость существования *CA***-**множеств без совершенного ядра. Однако доказательства этих утверждений Гедель до сих пор не опубликовал, хотя им выпущена отдельная монография о непротиворечивости континуум-гипотезы.

В своей последней работе П. С. Новиков дал исчерпывающее доказательство непротиворечивости существования неизмеримых проективных множеств, а также несчётных *CA*-множеств, лишённых совершенного ядра. Им сделано даже нечто большее: в работе построены некоторые множества классическими средствами теории множеств, и только для изучения их свойств привлечены средства модели Гильберта-Геделя. С помощью этих средств показано, что в рамках этой модели одно из этих множеств является неизмеримым проективным множеством второго класса, а другое—несчётным *CA*-множеством без совершенного ядра.

В той же работе Пётр Сергеевич установил непротиворечивость того, что для всех достаточно высоких классов проективных множеств имеет место обращённая отделимость. Эти результаты получены при помощи своеобразного синтеза теоретико-множественных и логических методов. В связи с этой работой уже сейчас возникает целый комплекс новых задач и открываются чрезвычайно интересные новые перспективы.

Петру Сергеевичу принадлежит также фундаментальная работа в области математической физики: им установлена единственность решений обратной задачи теории потенциала для случая звёздных областей. Эта работа имеет большое значение для теоретической геофизики.

(Текст приводится по журналу:

Успехи математических. наук, 1952г. т. VII, вып. 2)